I numeri naturali secondo Peano

Nell'insegnamento medio si tenta di ricondurre il concetto di numero naturale a quello di equipotenza tra insiemi finiti.
Vogliamo caratterizzare direttamente i numeri naturali mediante assiomi.
Questi cinque assiomi sui quali si basa la teoria dei numeri naturali vennero enunciati, sostanzialmente, dal matematico G. Peano (1858-1932) nel suo *Arithmetices Principia Novo Methodo Exposita* (1889) e, dopo più di cent'anni, rimangono esemplari per la loro semplicità ed eleganza.

LUCIANO SCAGLIANTI

Gli assiomi di Peano

Peano introduce tre *concetti primitivi: numero, zero* (simbolo 0) e *successivo*, i quali soddisfano i seguenti assiomi.

$\mathbf{A_1}$) *Esiste un insieme, indicato con* $\mathbb{N}$, *di elementi chiamati numeri naturali, al quale appartiene lo* **zero**.

$\mathbf{A_2}$) *A ogni numero naturale n corrisponde un altro numero naturale, univocamente determinato, che si chiama* **successivo** *di n, e si indica con* n^+.

$\mathbf{A_3}$) *Il successivo di un numero naturale non è mai zero.*

$\mathbf{A_4}$) *Se due numeri hanno lo stesso successivo sono uguali.*

$\mathbf{A_5}$) (*Assioma di* **ricorrenza**, *o di induzione*).
Sia A una parte di $\mathbb{N}$ *che contenga lo zero e tale che, se A contiene n, A contiene anche il suo successivo n+. Allora A coincide con* $\mathbb{N}$.

Facciamo qualche breve commento a questi assiomi.
L'assioma $\mathbf{A_1}$ afferma che l'insieme $\mathbb{N}$ non è vuoto: contiene infatti almeno un elemento, chiamato *zero* e indicato con 0. Partendo da questo numero si costruiscono tutti gli altri.
L'assioma $\mathbf{A_2}$ definisce su $\mathbb{N}$ una *funzione*, che potremmo chiamare *di successività*, la quale fa corrispondere ad ogni $n \in \mathbb{N}$, un altro elemento n^+, pure appartenente ad $\mathbb{N}$, detto *successivo* di n:

$$n \mapsto n^+$$

Si chiama anche *operazione* (*unaria*) *di successività*, l'operazione che fa passare da n a n^+.
Questa operazione dà il procedimento generale della costruzione dei numeri naturali.
È chiaro che l'assioma $\mathbf{A_2}$ risponde a una richiesta che è ben spontanea quando si voglia effettuare, sugli elementi di un insieme, un *conteggio:* per tale scopo è infatti indispensabile disporre di qualche criterio che consenta di scegliere, *dopo* un elemento, *un altro*: il *successivo*.
Per l'assioma $\mathbf{A_2}$, 0 ha un successivo, $0^+ \neq 0$, che chiameremo *uno*, indicandolo con 1; perciò:

$$0^+ = 1.$$

In tal modo, abbiamo trovato in $\mathbb{N}$, una *catena* di elementi, precisamente:

$$0 \mapsto 1.$$

Gli altri assiomi precisano le proprietà della funzione di successività. Se ci si limitasse agli assiomi $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$, si potrebbe immaginare che la funzione desse origine alla catena:

$$0 \mapsto 1 \mapsto 0.$$

L'insieme $\mathbb{N}$ si ridurrebbe allora all'insieme dei soli elementi 0 e 1. L'assioma $\mathbf{A_3}$ impedisce che si ritorni allo zero, e l'insieme $\{0,1\}$ non verifica $\mathbf{A_3}$, il quale ci costringe dunque a continuare la catena. Il numero 1 ha un successivo, $1^+ \neq 1$ e $1^+ \neq 0$, che chiameremo *due* e indicheremo con 2 ($1^+ = 2$):

$$0 \mapsto 1 \mapsto 2.$$

Consideriamo ora il successivo di 2; risulta:

$$2^+ \neq 2, \text{ per } \mathbf{A_2}; \qquad 2^+ \neq 0, \text{ per } \mathbf{A_3}.$$

Ma non può essere neppure:

$$2^+ = 1,$$

perché si avrebbe:

$$0^+ = 1, \quad 2^+ = 1$$

in contrasto con l'assioma $\mathbf{A_4}$ il quale, in sostanza, afferma che *ogni numero naturale*[1] $n \neq 0$ *è il successivo di uno e un solo numero naturale, detto il precedente di n.*
Indicando con $\mathbb{N}^*$ l'insieme dei numeri naturali diversi da zero, possiamo dire che la funzione $n \mapsto n^+$ è una *corrispondenza biunivoca* tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^*$.

Applicando la funzione di successività all'ultimo numero, p, ottenuto in una tappa della costruzione, se ne ottiene uno nuovo, p^+, distinto da tutti quelli già ottenuti, sul quale si può ricominciare l'operazione; si ottiene la catena K:

$$(1) \qquad 0 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto \ldots \mapsto p \mapsto p^+ \mapsto \ldots .$$

Si constata in tal modo che la catena è *illimitata*.
Si dice che $\mathbb{N}$ è un *insieme infinito*.
Possiamo però affermare che K coincide con $\mathbb{N}$?
In altre parole: K è un sottoinsieme *proprio* di $\mathbb{N}$, oppure $K = \mathbb{N}$?
La risposta è $K = \mathbb{N}$.
Infatti K è una parte di $\mathbb{N}$; inoltre, per costruzione:

$$0 \in K, \qquad p \in K \Rightarrow p^+ \in K.$$

Per l'assioma $\mathbf{A_5}$, K *coincide* allora con $\mathbb{N}$; non esistono, cioè, numeri naturali in più di quelli elencati nella catena (1).
Scriveremo, dunque, senza indicare esplicitamente l'operazione di successività:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

L'assioma $\mathbf{A_5}$ è detto *principio di induzione matematica*, il cui uso è fondamentale negli sviluppi dell'Aritmetica.

Addizione in $\mathbb{N}$

Abbiamo costruito l'insieme dei numeri naturali; bisogna ora dargli una struttura.
Cominciamo con definire l'addizione in $\mathbb{N}$.

DEFINIZIONE – *Data la coppia ordinata di numeri naturali* (a, b), *si chiama* **somma** *di a e b, ed è indicata con* $a + b$, *il numero naturale definito per ricorrenza nel modo seguente:*
a) $a + 0 = a$;
b) *supposto definito* $a + b$, *si pone:*

$$a + b^+ = (a + b)^+.$$

L'operazione con cui si ottiene la somma si dice **addizione**.
Si noti anche che, per definizione:

$$a + 1 = a + 0^+ = (a + 0)^+ = a^+,$$

cioè: *il successivo di un numero è la somma del numero con il numero* 1.
Pertanto la parte **b)** della definizione, si può scrivere:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.+$$

L'addizione in $\mathbb{N}$ gode delle proprietà espresse dai seguenti teoremi ($a, b, c \in \mathbb{N}$):

1°) L'addizione in $\mathbb{N}$ è un'operazione **sempre possibile**.
La somma $a + b$ è definita per $b = 0$; inoltre (per la parte **b** della definizione) se l'addizione è definita per b, allora lo è anche per b^+.
Dunque lo è per ogni numero naturale.

2°) In $\mathbb{N}$ l'addizione è associativa:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Per $c = 0$, la proprietà è vera, essendo:

$$(a + b) + 0 = a + b; \quad a + (b + 0) = a + b.$$

Supponiamo vera la proprietà per c (*ipotesi di ricorrenza*) e dimostriamola vera per c^+; cioè proviamo che:

$$(a + b) + c^+ = a + (b + c^+).$$

Si ha successivamente:

$(a + b) + c^+ = [(a + b) + c]^+ =$ (*definizione*)
$= [a + (b + c)]^+ =$ (*ipotesi di ricorrenza*)
$= a + (b + c)^+ = a + (b + c^+)$ (*definizione*).

Si ha pertanto:

$$(a + b) + c^+ = a + (b + c^+).$$

In virtù di $\mathbf{A_5}$, la proprietà associativa è vera per un c qualsiasi.

OSSERVAZIONE – Se si pone $c^+ = c + 1$, allora la dimostrazione è data dai seguenti passaggi:

$$(a + b) + (c + 1) = [(a + b) + c] + 1 = [a + (b + c)] + 1 = $$
$$= a + [(b + c) + 1] = a + [b + (c + 1)].$$

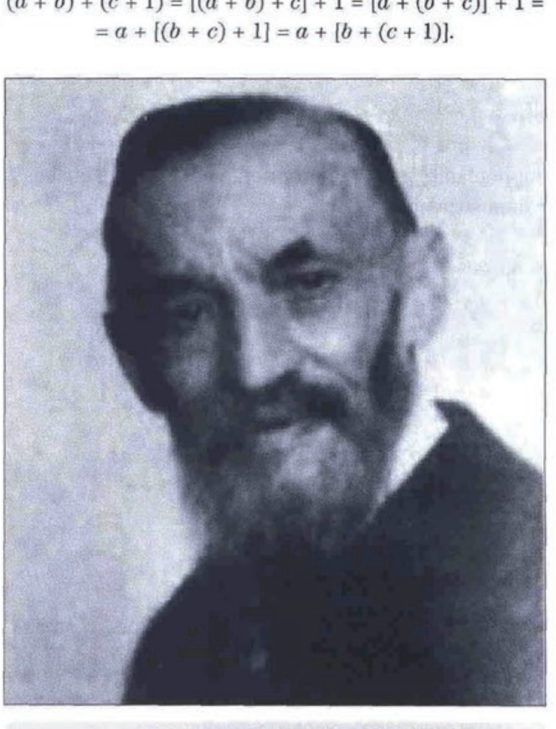

Fig. 1 Giuseppe Peano (Spinetta di Cuneo, 27 agosto 1858 - Torino 20 aprile 1932).

3°) *In* $\mathbb{N}$, *lo 0 è l'***elemento neutro**.
Per definizione, sappiamo che 0 è l'elemento neutro a *destra*:

$$a + 0 = a.$$

Proviamo, ora, che 0 è elemento neutro a *sinistra*:

$$0 + a = a. \qquad (1)$$

La (1) è vera per $a = 0$, perché $0 + 0 = 0$, essendo 0 elemento neutro a destra.
Supponiamo la (1) dimostrata per a e dimostriamola per $a^+ = a + 1$.
Infatti, si ha (e il lettore giustifichi i passaggi):

$$0 + (a + 1) = (0 + a) + 1 = a + 1,$$

e ciò prova che la (1) è vera per ogni a.

4°) *In* $\mathbb{N}$, *l'addizione è* **commutativa**.

$$a + b = b + a. \qquad (2)$$

La proprietà è vera per $b = 0$, come risulta dal teorema 3°.
Dimostriamo ora la (2) per $b = 1$, cioè proviamo che:

$$a + 1 = 1 + a. \qquad (3)$$

Si osservi che la (3) è vera per $a = 0$, per quanto detto sopra.
Supponiamo che la (2) sia vera per a e dimostriamola vera per a^+. Si ha:

$a^+ + 1 = (a + 1) + 1 =$
$= (1 + a) + 1 =$ (*ipotesi di ricorrenza*)
$= 1 + (a + 1) =$ (*per associatività*)
$= 1 + a^+$.

Supponiamo, infine, la proprietà vera per un b qualsiasi e dimostriamo:

$$a + b^+ = b^+ + a.$$

Si ha:

$a + b^+ = a + (b + 1) =$
$= (a + b) + 1 =$ (*associatività*)
$= (b + a) + 1 =$ (*ipotesi di ricorrenza*)
$= b + (a + 1) =$ (*associatività*)
$= b + (1 + a) =$ (*per la (2)*)
$= (b + 1) + a =$ (*associatività*)
$= b^+ + a$.

Sottrazione e relazione d'ordine in $\mathbb{N}$

Definiamo una relazione in $\mathbb{N}$ e al tempo stesso un'operazione, la sottrazione, la quale è definita parzialmente.
DEFINIZIONE – *Dati due numeri naturali a e b, se esiste un solo numero naturale d, tale che:*

$$a + d = b,$$

si dice che: «*a* è **minore o uguale a** *b*», *e si scrive* $a \leq b$.
*Il numero d si chiama «***differenza** *di a e b» e si indica con:*

$$d = b - a.$$

Si osservi che:
1) Non sempre esiste la differenza tra b ed a; ed esempio, quando $a = 1$ e $b = 0$, per l'assioma $\mathbf{A_3}$, non esiste alcun $d \in \mathbb{N}$, tale che $1 + d = 0$.
2) Per ogni $b \in \mathbb{N}$:

$$b \geq 0;$$

infatti: $0 + b = b$.
Infine si dimostra, e lasciamo la facile dimostrazione al lettore, che la relazione $\leq$ in $\mathbb{N}$ gode delle seguenti proprietà:
1) *riflessiva:* $a \leq a$;
2) *antisimmetrica:* $(a \leq b \text{ e } b \leq a) \Leftrightarrow a = b$;
3) *transitiva:* $(a \leq b \text{ e } b \leq c) \Leftrightarrow a \leq c$;
4) *Per a, b qualsiasi si ha sempre:* $a \leq b$, *oppure:* $b \leq a$.
Queste quattro proprietà si riassumono dicendo che: *in* $\mathbb{N}$ *la relazione* $\leq$ *è una* **relazione d'ordine totale**.

Moltiplicazione in $\mathbb{N}$

Completiamo lo studio della struttura di $\mathbb{N}$, definendo una nuova operazione, la *moltiplicazione*, mediante la seguente:

DEFINIZIONE – *Data la coppia ordinata di numeri naturali* (a, b), *si chiama* **prodotto** *di a e b, ed è indicato con ab, il numero naturale definito per ricorrenza nel modo seguente:*
a) $a \cdot 0 = 0$;
b) *supposto ab definito, si pone per definizione:*

$$ab^+ = ab + a.$$

L'operazione con cui si ottiene il prodotto si chiama **moltiplicazione**.
La moltiplicazione in $\mathbb{N}$ gode delle proprietà espresse dai seguenti *teoremi* ($a, b, c \in \mathbb{N}$):
1°) *La moltiplicazione in* $\mathbb{N}$ *è un'operazione sempre possibile.*
Infatti il prodotto ab è definito per $b = 0$; inoltre se l'addizione è definita per b, lo è anche per b^+ (per la parte **b** della definizione).
2°) *Il numero 1 è l'***elemento neutro** *della moltiplicazione.*
Per $b = 0$, si ha:

$$a \cdot 0^+ = a \cdot 0 + a,$$

e poiché $0^+ = 1$ e $a \cdot 0 = 0$, si ha:

$$a \cdot 1 = a.$$

3°) *Il prodotto come somma reiterata.*
Per $b = 1$, si ha:

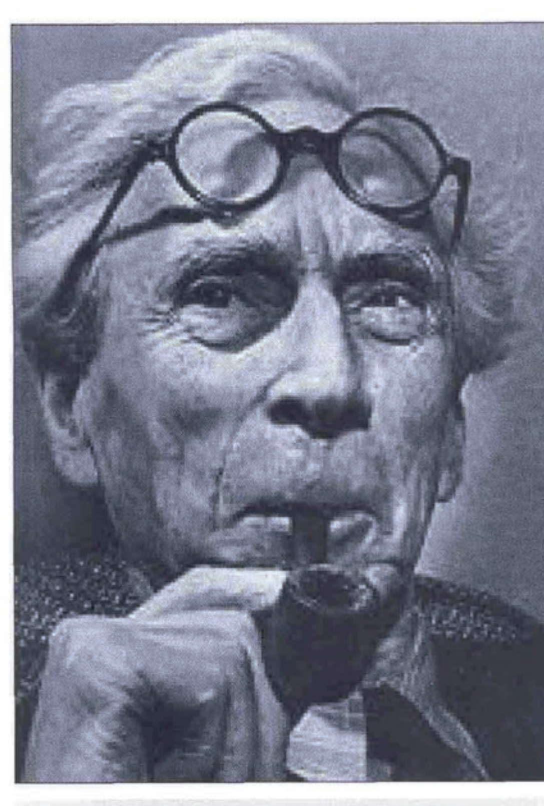

Fig. 2 Bertrand Russel (Ravenscroft, 18 maggio 1872 - Penrhyndeudraeth, 2 febbraio 1970)

$$a \cdot 1^+ = a \cdot (1 + 1) = a + a.$$

Per $b = 2$, si ha:

$$a \cdot 2^+ = a\,(2 + 1) = a \cdot 2 + a = a + a + a,$$

e così via, finché:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots a}_{b \text{ addendi}}.$$

4°) *In* $\mathbb{N}$ *la moltiplicazione è distributiva a sinistra rispetto all'addizione*:

$$a(b + c) = ab + ac. \qquad (4)$$

Per $c = 0$, si ha:

$$a(b + 0) = ab \quad \text{e} \quad ab + a \cdot 0 = ab$$

e dunque la (4) è vera per $c = 0$.
Supponiamo ora la proprietà dimostrata per c, proviamo che:

$$a(b + c^+) = ab + ac^+.$$

Successivamente si ha:

$a\,(b + c^+) = a\,[b + (c + 1)] =$
$= a\,[(b + c) + 1] =$ (*definizione di addizione*)
$= a\,(b + c) + a =$ (*definizione di moltiplicazione*)
$= ab + ac + a =$ (*ipotesi di ricorrenza*)
$= ab + a\,(c + 1) =$ (*definizione di moltiplicazione*)
$= ab + ac^+$.

La proprietà è dunque vera per a, b, c qualsiasi.
La distributività a destra, cioè:

$$(b + c)\,a = ba + ca,$$

risulterà dalla commutatività (v. teorema 7°).

5°) *In* $\mathbb{N}$ *la moltiplicazione è* **associativa**:

$$(ab)\,c = a\,(bc). \qquad (5)$$

Per $c = 0$, la proprietà è vera, essendo:

$$(ab) \cdot 0 = 0 \quad \text{e} \quad a(b \cdot 0) = a \cdot 0 = 0.$$

Supponiamo, ora, la (5) vera per b e dimostriamo che:

$$(ab)c^+ = a\,(bc^+).$$

Successivamente si ha:

$(ab)\,c^+ = (ab)\,c + ab =$ (*definizione*)
$= a\,(bc) + ab =$ (*ipotesi di ricorrenza*)
$= a\,(bc + b) =$ (*distributività*)
$= a\,(bc^+) =$ (*definizione*)

6°) *Per ogni numero naturale b, si ha:*

$$1 \cdot b = b.$$

Infatti, si ha $1 \cdot 0 = 0$.
Se la proprietà è vera per b, proviamo che è vera per $(b + 1)$, infatti:

$$1 \cdot (b + 1) = 1 \cdot b + 1 \cdot 1 = b + 1,$$

e ciò prova che la proprietà è vera per ogni b.

7°) In $\mathbb{N}$ la moltiplicazione è **commutativa**:

$$ab = ba. \qquad (6)$$

Proviamo, innanzitutto, che:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a, \quad \text{cioè} \quad 0 = 0 \cdot a. \qquad (7)$$

Per $a = 0$, la (7) è evidente.
Supponiamo la (7) vera per a e proviamo che:

$$0 = 0 \cdot (a + 1).$$

Infatti:

$$0 \cdot (a + 1) = 0 \cdot a + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0.$$

Supponiamo, ora, la (6) vera per b e dimostriamo che:

$$a(b + 1) = (b + 1)a.$$

Infatti (e il lettore giustifichi i passaggi):

$$a(b + 1) = ab + a = ba + a =$$
$$= ba + 1 \cdot a = (b + 1)a.$$

Conclusioni

Concludiamo questa breve introduzione al metodo assiomatico di Peano, riportando alcune osservazioni di B. Russel[2], e rinviando il lettore desideroso di maggiori approfondimenti a testi specializzati[3].

«...esporremo alcune delle ragioni per cui il trattato di Peano è meno definitivo di quanto sembri.
In primo luogo i tre concetti primitivi di Peano, e cioè ***'0'***, ***'numero'*** *e* ***'successivo'*** *si prestano ad un numero infinito di differenti interpretazioni, ciascuna delle quali soddisfa i cinque assiomi.*
Ecco qualche esempio.
1. Poniamo che ***'0'*** *significhi 100, e che* ***'numero'*** *stia a significare i numeri da 100 in poi nell'insieme dei numeri naturali. Tutti i nostri assiomi saranno allora soddisfatti, anche il quarto: infatti, anche se 100 è il successivo di 99, 99 non è un* ***'numero'*** *nel senso che ora diamo alla parola 'numero'. È ovvio che qualsiasi numero può essere sostituito al 100 in questo esempio.*
2. Poniamo che ***'0'*** *abbia il suo normale significato; ma che* ***'numero'*** *significhi ciò che comunemente chiamiamo* ***'numero pari'*** *e poniamo che il 'successivo' di un numero sia il successivo pari.*
Allora ***'1'*** *sarà sostituito da* ***'2'***, *il* ***'2'*** *dal* ***'4'***, *e così via: l'insieme dei numeri darà adesso*

0, 2, 4, 6, 8, 10, ...

Tutti e cinque gli assiomi di Peano sono ancora soddisfatti.
...
Nel sistema di Peano non c'è nulla che ci permetta di distinguere tra queste differenti interpretazioni. L'autore presuppone che noi si sappia cosa egli intende per ***'0'***, *e presuppone quindi che non attribuiremo a questo simbolo il significato di 100 o delle piramidi d'Egitto o d'un'altra cosa qualsiasi.*
Il punto importante è che ***'0'***, ***'numero'***, *e* ***'successivo'*** *non devono venir definiti per mezzo degli assiomi di Peano, ma debbono essere comprensibili indipendentemente da questi.*
Non vogliamo semplicemente che i nostri numeri verifichino le formule matematiche, ma che si applichino in modo esatto agli oggetti con cui siamo a contatto. Vogliamo avere dieci dita, due occhi e un naso. Un sistema in cui '1' significasse 100, e così via, potrebbe andar benissimo dal punto di vista della matematica pura, ma non si applicherebbe alla vita quotidiana. Vogliamo che ***'0'***, ***'numero'***, *e* ***'successivo'*** *abbiano dei significati che possano esattamente accordarsi con le dita, gli occhi e i nasi».*

Luciano Scaglianti
Università Cattolica di Milano

Bibliografia

A. Doneddu, *Aritmetica generale*, Feltrinelli.
M. Dedò, *Matematiche elementari*, II, Liguori.
M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, II, Biblioteca Einaudi.
AA.VV., *La sfida di Peano*, Spirali Edizioni.

1. *La restrizione* $n \neq 0$ *segue da* $\mathbf{A_3}$.
2. B. Russel, *Introduzione alla Filosofia matematica*, pag. 12 e seguenti, Longanesi.
3. Per esempio: M. Dedò, *Matematiche elementari*, II, pag. 183 e seguenti, Liguori.